ÁREA DE FIGURAS EN EL GEOPLANO.

Julieta Verdugo. Luis Briseño.
Rita Vázquez. Oscar Palmas.
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM.

Julio, 2000.

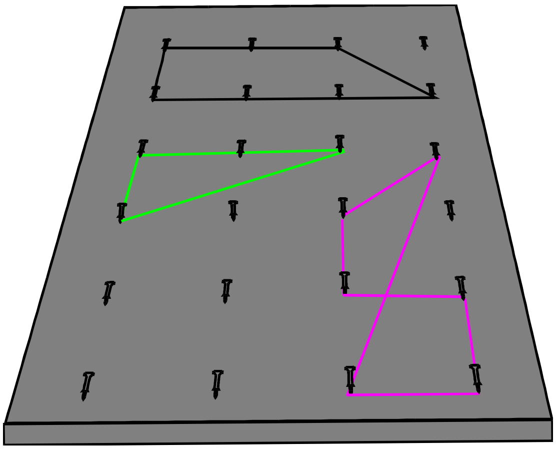
1. Introducción.

En la búsqueda de materiales con los cuales desarrollar la enseñanza de las matemáticas de una manera amena, no sólo entre los estudiantes, sino entre los propios profesores con los que hemos trabajado desde hace mucho tiempo (a quienes, aunque sea de manera anónima, agradecemos su colaboración), los autores hemos venido utilizando el geoplano. Con él hemos desarrollado diversas actividades, una de las cuales es el tema de este folleto: el cálculo de áreas por diversos métodos. Como se verá en el desarrollo de este escrito, el cálculo de áreas no es nuestro único objetivo, sino que sirve también como vehículo para la discusión de las distintas observaciones que pudieran hacerse por parte de los estudiantes (o de los profesores) acerca de varios temas de matemáticas. Aunque consideramos que no es posible (ni deseable) pretender agotar lo que podría ser una discusión en un salón dentro de estas páginas, sí *queremos dar una muestra de nuestra propuesta*, partiendo del trabajo "concreto" del geoplano hasta enunciar un resultado matemático (la fórmula de Pick), pasando por el descubrimiento de pequeñas propiedades de las figuras construidas en el geoplano, el establecimiento de diversas conjeturas (algunas correctas y otras erróneas, como en el trabajo común de cualquier matemático), la necesidad de la formalización de ciertos hechos, para con base en ellos avanzar en la comprensión de los conceptos implicados, etcétera. Concluimos nuestro trabajo mostrando de manera breve cómo utilizar la fórmula de Pick para aproximar el área de regiones sencillas. Como de costumbre, lo que presentamos es apenas una propuesta que puede ser modificada y enriquecida por los propios profesores.

2. Construcción y uso del geoplano

De acuerdo con Gattegno, el geoplano es un material *multivalente* (puede servir para diversos propósitos) que "permite tomar conciencia de las relaciones geométricas". Con los geoplanos se pueden enseñar teoremas de la geometría plana, con algunas ventajas sobre el pizarrón, pues las figuras obtenidas son claras y no dependen de la habilidad del maestro; como los geoplanos son pequeños, es fácil girarlos para mostrar que las propiedades en cuestión no dependen del tipo de desplazamiento que realicemos.

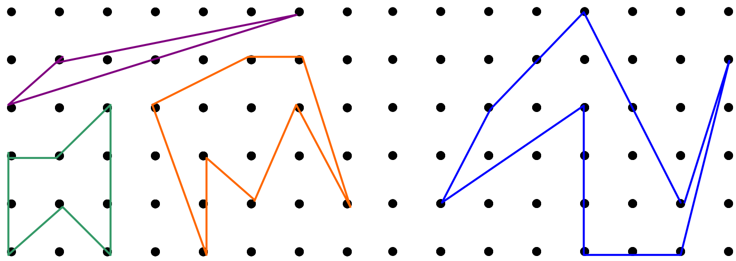
Se puede construir un geoplano con una tabla e hileras de clavos dispuestos como una cuadrícula, de modo que tengamos un arreglo de clavos como en la siguiente figura. Para "trazar" figuras en el geoplano, utilizamos ligas de varias longitudes (y de preferencia de colores).[1]



Un geoplano construido con madera y clavos.

El uso del geoplano o de papel cuadriculado puede desarrollarse en diversas etapas. En una primera etapa, el geoplano puede servir como apoyo para desarrollar la imaginación en cuanto a la diversidad de figuras que puedan formarse, pero el uso del papel también será importante para disponer de un "registro permanente" de los avances logrados.

Por supuesto, el trabajo con el geoplano de madera requiere un poco de entrenamiento. Por ello, conviene tomarse un momento para que los alumnos construyan algunas figuras. En la siguiente cuadrícula mostramos algunas figuras que pueden surgir en este momento.



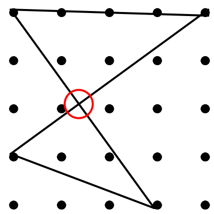
Para comenzar a medir en el geoplano, establecemos una convención: Nuestra unidad de medida de longitud será la distancia horizontal (o vertical) mínima entre un clavo y otro. Así, cada lado de nuestro geoplano de 8×8 clavos mide 7 unidades de longitud y el geoplano completo tiene 49 unidades cuadradas de área.

[1] Todas las actividades de este folleto pueden realizarse sin el geoplano, utilizando sólo hojas de papel cuadriculado y lápices de colores.

Una actividad que no desarrollaremos aquí, pero que también puede llevar a preguntas interesantes es el cálculo de perímetros.

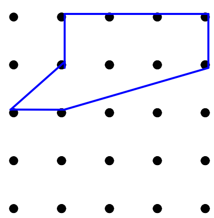
3. Algunos métodos para el cálculo de áreas.

Antes de calcular algunas áreas, debemos aclarar que trabajaremos sólo con polígonos que no se intersectan a sí mismos, los cuales se llaman *simples*. Así que polígonos como el de la siguiente figura no serán parte de nuestro estudio.



Además, los clavos de nuestro geoplano serán los únicos vértices admisibles para todos los polígonos que construyamos.

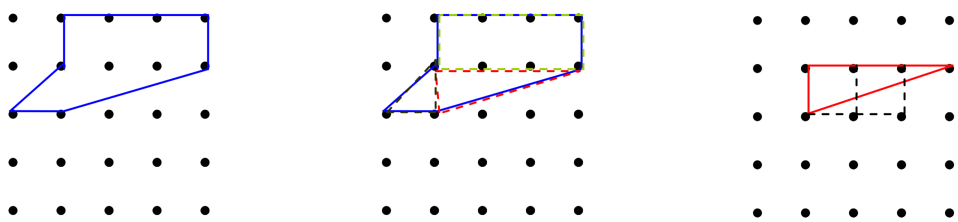
Veamos ahora el caso concreto de una figura cuya área queremos calcular.



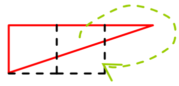
¿Cómo podríamos calcular el área? ¿Cuáles son las diferentes estrategias para calcular áreas de figuras en el geoplano?

Aquí mostraremos sólo tres formas de calcular el área de esta figura. Cada uno de estos métodos depende del grado de desarrollo del concepto de área, de la madurez y de la comprensión de los conceptos previos.

Uno de los métodos consiste en "cuadricular" la figura, contar los cuadros al interior de la figura y hacer asociaciones para obtener las áreas:



Con este método, separamos la figura en tres partes: un rectángulo de área 3, un pequeño triángulo cuya área es igual a la mitad del área de un cuadrado unitario, es decir, ½; y un segundo triángulo, cuya área se calcula separándolo en tres partes mediante segmentos verticales, como en la siguiente figura:



La parte de la izquierda y la de la derecha se complementan para formar un cuadrado unitario, mientras que la parte central tiene área ½, de modo que el área de la figura original está dada por la suma

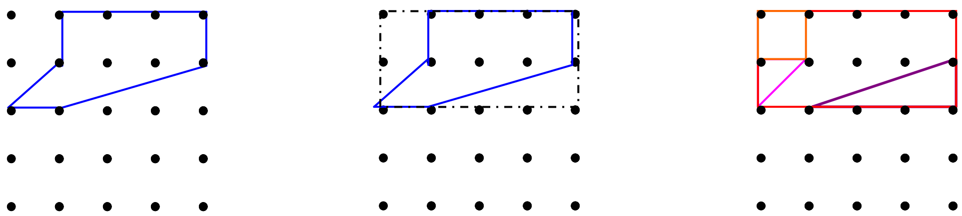
$$3 + \tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = 5.$$

En un segundo método, surge el "uso de fórmulas" en los casos donde puede hacerse esto, junto con áreas reconocidas como partes de la unidad:

En este método, se divide la figura en un rectángulo de base 3 y altura 1; un triángulo de base 1 y altura 1, y un segundo triángulo de base 3 y altura 1, de modo que el área de la figura original es

$$(3\times 1)+\left(\frac{1\times 1}{2}\right)+\left(\frac{3\times 1}{2}\right)=3+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=5.$$

En un tercer método se "completa" la figura mediante piezas conocidas:

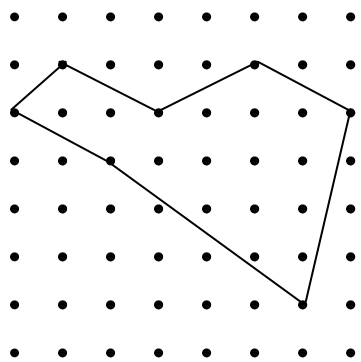


Aquí encerramos a la figura en un rectángulo grande, de área 8. A dicha área le restamos el área de un cuadrado unitario y el área de dos triángulos. El primer triángulo es la mitad de un cuadrado unitario, y por tanto tiene área ½; el segundo es la mitad de un rectángulo de área 3, de modo que el triángulo tiene área 3/2; así, el área es

$$8-1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=8-3=5.$$

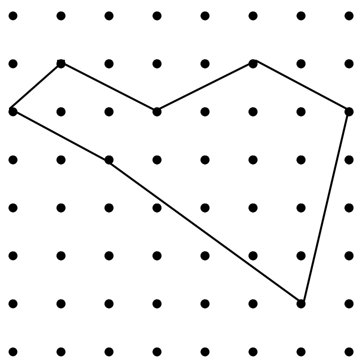
Hemos mostrado sólo tres ejemplos de métodos de cálculo de áreas. Es importante que, en la medida de lo posible, se aprovechen las ideas de los estudiantes para tales cálculos y que se enfrenten a la necesidad de construir un método general para obtener las áreas.

Aquí conviene calcular diversas áreas. Una figura que usaremos más adelante y cuya área puede calcularse en este momento es la siguiente:



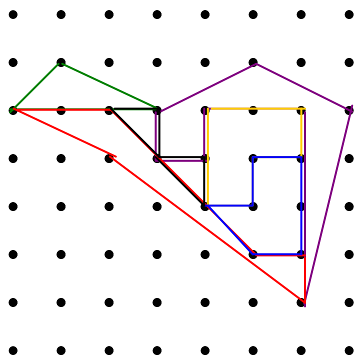
4. Desarrollo de un experimento.

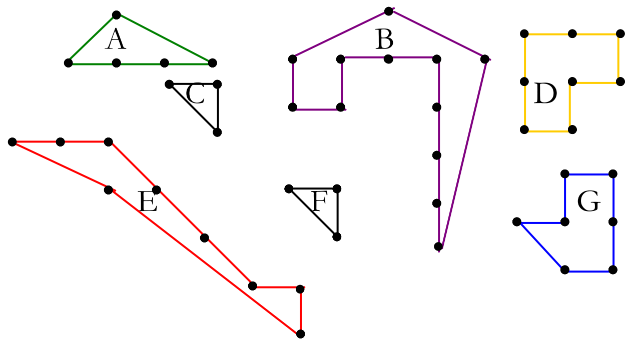
Dada la siguiente figura en el geoplano, construir un rompecabezas donde cada una de las piezas sea un polígono con vértices en clavos del geoplano y que no tenga clavos al interior. La unión de todas las piezas debe ser exactamente la figura original. Después de que los estudiantes (de preferencia agrupados en equipos) hayan construido sus rompecabezas, hallar el área de cada una de las piezas y el área de la figura original.



Tal vez sea oportuno abrir un paréntesis para hablar de los polígonos, su definición, sus características básicas, lo que son los polígonos convexos y los no convexos, etcétera.

Un ejemplo de rompecabezas es el siguiente, el cual tiene 7 piezas:

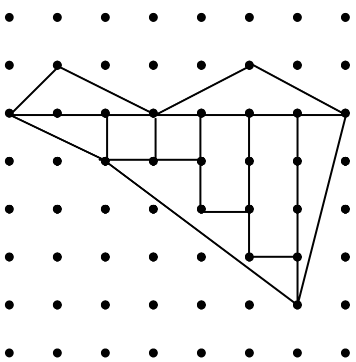


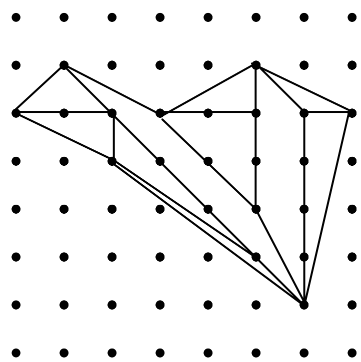


Al calcular las áreas de estas figuras (por cualquier método), obtenemos la siguiente tabla:

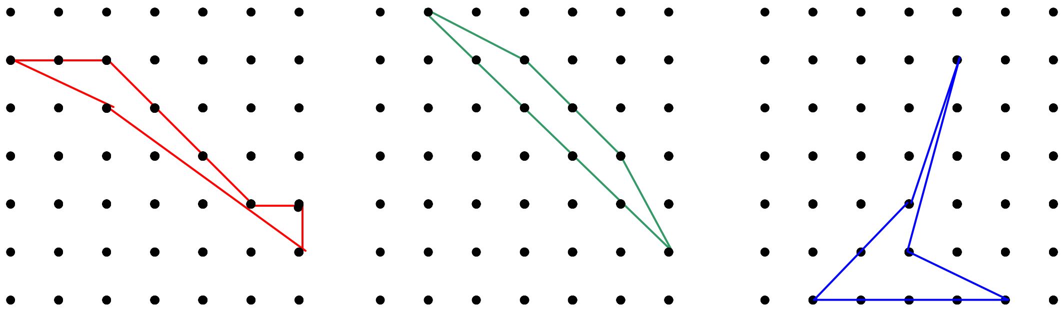
Figura	Área
A	3/2
B	5
C	½
D	3
E	7/2
F	½
G	5/2

Será importante que se propongan diversas formas de subdividir a la figura (siempre que las partes no tengan clavos al interior), con el fin de disponer de una variedad de ejemplos que muestren las posibles propiedades de las figuras sin clavos al interior. A continuación mostramos dos ejemplos más de rompecabezas, para que con ellos se elaboren tablas como la anterior.





En la tabla anterior aparecen los datos sin ningún orden aparente, excepto por el orden en que aparecían las figuras. Al usar los otros rompecabezas, o incluso otros ejemplos diseñados por los maestros o por los propios estudiantes, podrá verse que las figuras con *un mismo número de clavos* (no importando la forma que tienen) parecen tener cierta característica común. Por ejemplo, las siguientes figuras tienen 9 clavos en la orilla y ninguno al interior, formas y número de lados diferentes, pero las tres tienen la misma área.



Una vez observada esa característica común, podemos ordenar la tabla correspondiente al primer rompecabezas fijándonos en la cantidad de clavos que tiene cada figura en su orilla.

Figuras sin clavos al interior		
Figura	**Número de clavos en la orilla**	**Área**
C	3	½
F	3	½
A	5	3/2
G	7	5/2
D	8	3
E	9	7/2
B	12	2

En esta tabla sólo aparecen algunos números de clavos en la orilla, pero la idea es que los estudiantes construyan varios polígonos con diversos números de clavos cuyos datos faltan en la tabla, para completar ahora una tabla del siguiente tipo:

Figuras sin clavos al interior	
Número de clavos en la orilla	**Área**
3	½
4	¿ ?
5	3/2
6	¿ ?
7	5/2
8	3
9	7/2

Sugerimos reunir los resultados de varios equipos para tener mayor diversidad de ejemplos. Conviene enfatizar que estamos concentrando el área de figuras que no tienen clavos al interior y que no importa su forma.

Una vez llena la tabla, podremos observar lo siguiente:

- El área de las figuras aumenta de ½ en ½ de un renglón al otro.
- El área más pequeña en la tabla (½) corresponde a un triángulo.

Puede pedir a los estudiantes que calculen las áreas de más figuras (distintas a las que ya se tengan en las tablas) para reafirmar todas las observaciones. Por ejemplo, dos o tres figuras con un mismo número de clavos en la orilla, sin clavos al interior y con formas y número de lados diferentes.

Parecería entonces que *hay una relación estrecha entre el número de clavos en la orilla de una figura y el área de la misma.* Esta idea es lo que se llama en matemáticas una *conjetura.*

En matemáticas es común hablar de conjeturas. Una conjetura *no es más que una forma de decir "Yo pienso que se cumple lo siguiente:…", donde establecemos una afirmación sobre algún fenómeno. El establecimiento de conjeturas es una parte fundamental del quehacer matemático, pues éstas funcionan como una especie de motor generador de reflexiones, discusiones, etcétera, ya sea individuales o en grupo. Muchas conjeturas pueden resolverse con unos cuantos minutos de reflexión, pero hay otras cuya verdad o falsedad ha sido establecida después de varios siglos de esfuerzo de muchas personas.*

En nuestro caso, podemos establecer la siguiente *conjetura*:

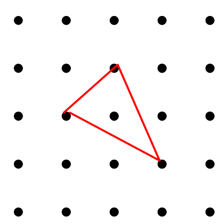
Hay una relación entre el número de clavos en la orilla de una figura y el área de la misma. Parece que *todas* las figuras que tienen un mismo número de clavos en la orilla (y ningún clavo al interior) tienen también la misma área. En particular, parece que:

1. Todas las figuras con 3 clavos en la orilla (y ningún clavo al interior) tienen área ½;
2. Todas las figuras con 4 clavos en la orilla (y ningún clavo al interior) tienen área 1 (= 2/2);
3. Todas las figuras con 5 clavos en la orilla (y ningún clavo al interior) tienen área 1 ½ (= 3/2), etcétera.

Podríamos agrupar los tres incisos anteriores en la siguiente conjetura general:

4. Todas las figuras con **n** clavos en la orilla (y ningún clavo al interior) tienen área (**n** – 2)/2.

En las conjeturas anteriores enfatizamos que las figuras no tienen clavos al interior. ¿Qué tan necesario es esto? ¿Podríamos conjeturar que todas las figuras con 3 clavos en la orilla tienen área ½? Para ver qué ocurre con otros ejemplos, calculemos el área de la siguiente figura con 3 clavos en la orilla (y un clavo al interior):



Vemos que el área es igual a 3/2 y no ½. De modo que, esta figura muestra que no todas las figuras con 3 clavos en la orilla tienen área ½.

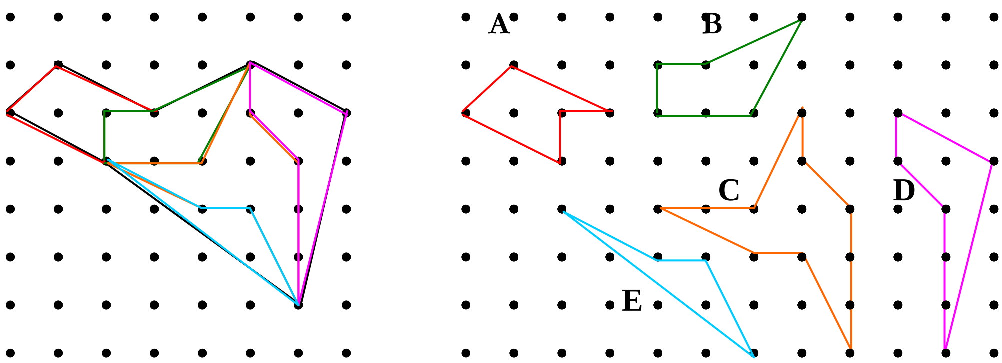
En este folleto hemos establecido varias conjeturas, con base en un cierto número de ejemplos.
Para demostrar la verdad de una conjetura *relativa a una colección de objetos (en nuestro folleto, una colección de figuras), tendremos que hallar* ***argumentos generales*** *aplicables a todos y cada uno de los objetos de la colección.*
Por otro lado, ***para demostrar la falsedad de una conjetura,*** *basta un ejemplo en contra, el cual, en matemáticas, se conoce como* ***contraejemplo****.*

Hemos visto que de *todas las figuras* construidas hasta ahora, las figuras sin clavos al interior satisfacen las conjeturas planteadas. Sin embargo, la existencia de *ejemplos* no implica la verdad de estas conjeturas, pues éstas últimas se refieren a figuras con características generales y no a casos particulares. Para establecer su verdad, deberemos determinar argumentos *generales*. Por otro lado, el último triángulo es un *contraejemplo* de la conjetura "Todas las figuras con 3 clavos en la orilla tienen área ½"; es decir, este ejemplo muestra que esta conjetura es *falsa*.

Puede insistirse en la discusión de otras conjeturas, como las siguientes (o algunas otras propuestas por los estudiantes):
Todas las figuras con 4 clavos en la orilla tienen área 1;
Todas las figuras con 5 clavos en la orilla tienen área 1 ½.

Continuaremos experimentando con el geoplano, pero debemos tener en mente que aún no hemos demostrado que la conjetura 4 (Todas las figuras con **n** clavos en la orilla y ningún clavo al interior tienen área (**n** – 2)/2) sea verdadera. Más adelante haremos esa demostración.

Como las figuras que tienen un único clavo al interior tienen un comportamiento distinto a las que no tienen clavos al interior, calcularemos ahora áreas de figuras con tal característica. Por ejemplo, podemos seguir considerando la figura original y dividirla en piezas de este tipo o diseñar otras figuras independientes de la original.



En este rompecabezas, cada pieza tiene solamente un clavo al interior; calculamos el área de cada una y las ordenamos según el número de clavos en la orilla.

Figuras con un clavo al interior		
Figura	**Número de clavos en la orilla**	**Área**
E	4	2
A	5	5/2
B	6	3
D	7	7/2
C	11	11/2

De nuevo, es conveniente construir muchos ejemplos para tener una mejor idea de la relación que parece haber entre el número total de clavos (los de la orilla **y** el del interior) y el área, así como para completar la tabla con los números "faltantes", como sigue:

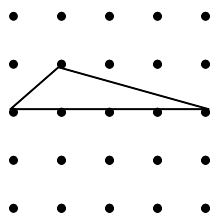
Figuras con un clavo al interior	
Número de clavos en la orilla	Área
3	3/2
4	2
5	5/2
6	3
7	7/2
8	4
9	9/2
10	5
11	11/2
12	6

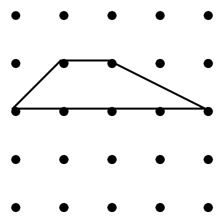
En la tabla podemos observar lo siguiente:

- El área de las figuras aumenta de ½ en ½ de un renglón al otro.
- El área más pequeña en esta tabla (3/2) corresponde a un triángulo.

Antes de seguir haciendo más conjeturas, tal vez podamos plantear ya una justificación para algunas de nuestras observaciones.

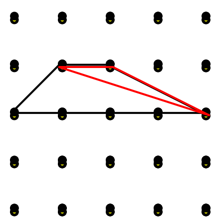
Por ejemplo, ¿por qué de un renglón a otro aumenta ½ el área? Tratemos de ver una respuesta, desde un punto de vista geométrico. ¿Qué significa en las figuras el cambio de un renglón a otro en la tabla, es decir, al aumentar en uno el número de clavos en la orilla? Regresemos a las figuras sin clavos al interior y veamos unos ejemplos para ver qué ocurre:





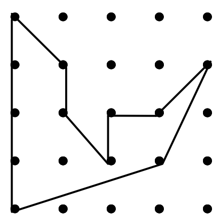
La figura de la derecha se obtiene de la figura de la izquierda agregando un clavo en la orilla.

Para calcular el área del polígono con 7 clavos en la orilla y ninguno en su interior, podemos calcular el área del polígono con 6 clavos en la orilla y ninguno al interior y sumarle el área del triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno al interior (el rojo); observemos que el área de este triángulo es ½.

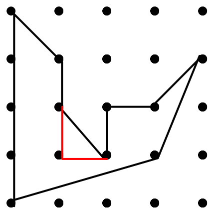


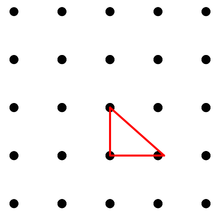
En general, quisiéramos ver si cualquier polígono con **n + 1** clavos en la orilla y ninguno al interior se puede descomponer en: (a) un polígono con **n** clavos en la orilla y ninguno al interior y (b) un triángulo con 3 clavos en la orilla y ninguno al interior. Si no pudiésemos hallar esa descomposición, eso querría decir que todos los puntos están alineados, lo cual es imposible.

Veamos si ocurre un fenómeno similar con una figura con clavos al interior, como la siguiente:



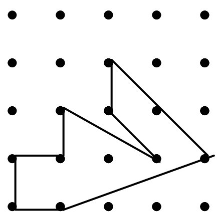
Esta figura tiene 12 clavos en la orilla y 1 en su interior. Podemos dividirla en dos piezas, una de las cuales es un triángulo y la otra tiene 13 clavos en la orilla y ninguno en su interior.



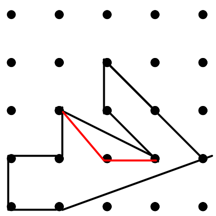


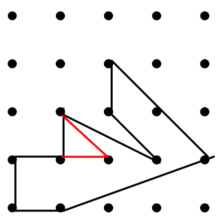
La diferencia entre las dos figuras es un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno al interior y cuya área es ½.

¿Será cierto que siempre podremos descomponer una figura de este modo, "quitándole" un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno en su interior?
Por ejemplo, si tenemos una figura con 10 clavos en la orilla y uno al interior, como la siguiente (observemos que su área es 5),



¿podemos descomponerla en una figura con 11 clavos en la orilla y ninguno al interior y un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno en su interior? Veamos dos ejemplos más de estas descomposiciones:





Observemos que en cada caso, las áreas de las figuras (el polígono con 11 clavos en la orilla y ninguno al interior y el triángulo con tres clavos en la orilla y ninguno en su interior) son 9/2 y ½, respectivamente.

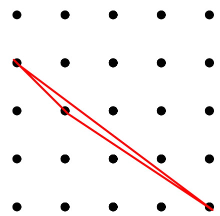
En resumen, estamos diciendo que el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y uno al interior es igual a la suma del área de un polígono con **n + 1** clavos en la orilla y ninguno al interior, más el área de un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno al interior. Observemos que necesariamente existen dos clavos de la orilla que no son colineales con el clavo interior y que son los vértices del triángulo buscado.

Antes de continuar, y para no estar repitiendo "un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno al interior" todo el tiempo, llamaremos de cierta forma a tales triángulos. De nuestro análisis se intuye que estos triángulos son los "más pequeños posibles", es decir, parecen tener las siguientes propiedades:

1. Cualquier figura se puede descomponer en un cierto número de tales triángulos.
2. Estos triángulos son las figuras de menor área posible en el geoplano, y tienen área ½.

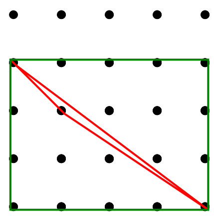
Diremos entonces que un triángulo con sólo 3 clavos en la orilla y ninguno al interior. es un *triángulo elemental.*

Una actividad cuya discusión puede ser interesante es la de encontrar todos los polígonos de área ½ en un geoplano de 5 x 5 clavos. El triángulo de esta figura es un ejemplo de ellos.



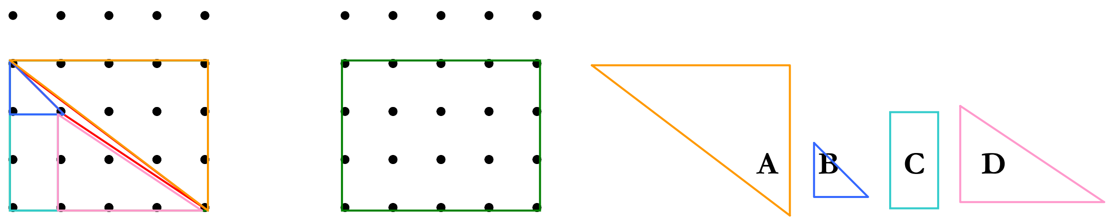
Veremos ahora si es cierto que cualquier triángulo elemental tiene área igual a ½;[2] veamos primero cómo calcular el área del triángulo elemental de la figura anterior.

Podemos encerrar al triángulo en un rectángulo donde el lado mayor del triángulo sea su diagonal, como se muestra en la figura de la derecha.



Para obtener el área del triángulo, calculamos el área del rectángulo y restamos las áreas de las figuras que marcamos con las letras A, B, C y D.

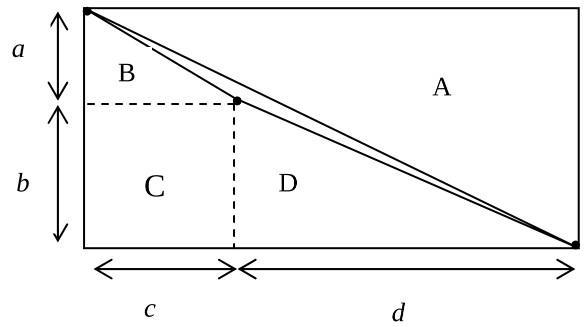
[2] La demostración de este hecho puede omitirse en una primera lectura.



Al calcular el área de cada región, tenemos que el área del triángulo es:

$$12-\left(6+\frac{1}{2}+2+3\right)=12-\frac{23}{2}=\frac{1}{2}.$$

Para analizar el caso general de cualquier triángulo elemental, encerramos a éste de la misma manera, obteniendo una figura como la siguiente, con las longitudes indicadas:



Calculemos ahora las áreas de las figuras, tanto del rectángulo como de cada una de las regiones A, B, C y D:

Área del rectángulo grande:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Área del triángulo A:

$$\frac{(a+b)(c+d)}{2}=\frac{ac+ad+bc+bd}{2}.$$

Área del triángulo B: $ac/2$.

Área del rectángulo C: bc.

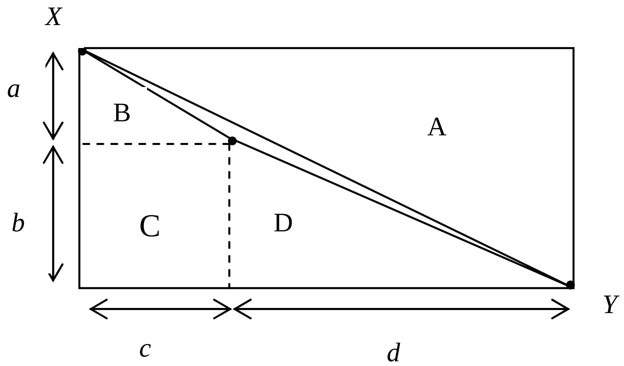
Área del triángulo D: $bd/2$.

Entonces el área del triángulo que buscamos es

$$ac+ad+bc+bd-\frac{ac+ad+bc+bd}{2}-\frac{ac}{2}-bc-\frac{bd}{2}=\frac{ad-bc}{2}.$$

Como queremos mostrar que el área de un triángulo elemental es igual a ½, falta demostrar que $ad - bc = 1$. ¿Cómo hacemos esto?

Sabemos que el triángulo sólo tiene 3 clavos en su orilla y ningún clavo al interior, de modo que tenemos que usar esa información. Contemos los clavos entonces:



La altura del rectángulo grande mide $a + b$, por lo que ella tiene $(a + b + 1)$ clavos; la base mide $c + d$, por lo que tiene $(c + d + 1)$ clavos. Por tanto, en todo el rectángulo hay:
$(a + b + 1)(c + d + 1)$ clavos en total.
Si queremos tener la mitad de los clavos del rectángulo, quitemos primero los dos puntos marcados con X y Y en el dibujo y después de obtener la mitad agreguemos los dos puntos que le faltan al triángulo A. De modo que el número de clavos de la región A es:

$$\frac{(a+b+1)(c+d+1)-2}{2}+2=\frac{(a+b+1)(c+d+1)}{2}+1.$$

El número de clavos en la región B es:

$$\frac{(a+1)(c+1)}{2}+1.$$

El número de clavos en la región C es $(b + 1)\ (c + 1)$.

El número de clavos en la región D es:

$$\frac{(b+1)(d+1)}{2}+1.$$

El número de clavos de la región A debe ser igual al número de clavos de la suma de las regiones B, C y D sin las repeticiones que pudiera haber. Esto es:

$$\frac{(a+b+1)(c+d+1)}{2}+1=\left[\frac{(a+1)(c+1)}{2}+1\right]+\left[(b+1)(c+1)\right]+\left[\frac{(b+1)(d+1)}{2}+1\right]-(c+1)-(b+1).$$

Al simplificar esta expresión se tiene que

$$ad - bc = 1,$$

como queríamos; así hemos concluido lo siguiente:

Cualquier triángulo elemental tiene área igual a ½.

Ahora que hemos justificado la afirmación anterior con argumentos *generales*, podemos usarla para ver si podemos justificar las otras conjeturas que habíamos establecido antes.

Así, esta afirmación es el primer paso para probar nuestra conjetura 4: "el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y ninguno en su interior tiene área igual a (**n** – 2)/2", pues si el polígono tiene 3 clavos en la orilla y ninguno al interior ya sabemos que tiene área igual a ½ y como ½ = (3 – 2)/2 entonces la proposición es verdadera para **n** = 3.
Para continuar, daremos ahora un argumento general *de tipo inductivo*. La idea es mostrar que si nuestra conjetura es válida para un número de clavos, entonces también lo será para el siguiente número de clavos. Si mostramos esto, como ya mostramos que la conjetura es válida para **n** = 3, entonces lo será para **n** = 4; si es válida para **n** = 4, lo será para **n** = 5, y así sucesivamente[3]..
Supongamos entonces que la afirmación "el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y ninguno en su interior tiene área igual a (**n** – 2)/2" es verdadera para **n** = **k**; es decir, el área de un polígono con **k** clavos en la orilla y ninguno al interior es (**k** – 2)/2. Debemos demostrar que la afirmación también es válida para un polígono con (**k + 1**) clavos en la orilla y ninguno al interior, es decir, que el área de este último polígono es ((**k + 1**) – 2)/2.
Como vimos anteriormente, cualquier polígono con (**k + 1**) clavos en la orilla se puede dividir en dos piezas, donde la primera tiene **k** clavos en la orilla y ninguno al interior y la segunda es un triángulo elemental. Entonces el área del polígono es

$$\frac{k-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k-2+1}{2}=\frac{(k+1)-2}{2},$$

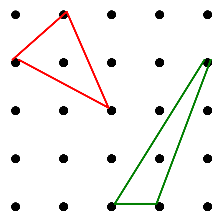
[3] En este momento estamos tratando de utilizar un argumento inductivo para obtener un resultado general. Esto es sólo una muestra del método de inducción matemática, el cual es de suma importancia en la Matemática. El libro de Polya citado en la bibliografía profundiza en el uso de este método.

que es precisamente el valor al cual queríamos llegar; esto demuestra que nuestra conjetura también es válida para un polígono con **k + 1** clavos en la orilla y ninguno en su interior. En resumen,

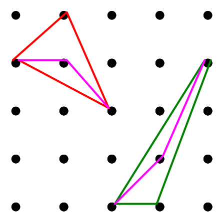
El área de un polígono con n clavos en la orilla y ninguno en su interior es

(**n** – 2)/2.

Veamos qué ocurre con el área de los polígonos con **n** clavos en la orilla y sólo uno en su interior. Para hacer un análisis similar al anterior, comenzaremos con los triángulos con 3 de clavos en su orilla y sólo uno en su interior.



Podemos dividir estos triángulos (usando el clavo interior) en dos piezas, la primera con 4 clavos en la orilla y ninguno en su interior y la segunda dada por un triángulo elemental:



Como las piezas ya no tienen clavos en el interior, podemos calcular su área fácilmente: Ahora sabemos que el área de un polígono con 4 clavos en la orilla y ninguno al interior es 2/2 y el área de un triángulo elemental es ½, de modo que el área de un triángulo con 3 clavos en la orilla y uno al interior es (4 – 2)/2 + ½ = 3/2, como ya teníamos en nuestra tabla de la página 12.

Para analizar qué ocurre con las demás figuras con sólo un clavo en su interior, nuevamente podemos construir más ejemplos para obtener una tabla similar a la siguiente.

Número de clavos en la orilla de la figura	Área de la figura sin clavos en su interior	Área de la figura con sólo un clavo en su interior
3	½	3/2
4	1	2 = 4/2
5	3/2	5/2
6	2	3 = 6/2
7	5/2	7/2
8	3	8/2
9	7/2	9/2
⋮		
100	98/2 = 49	¿ ?
⋮		
n	(**n** – 2)/2	¿ ?

En esta tabla y como antes ya habíamos observado, la tercera columna cambia de ½ en ½ de un renglón a otro. Podemos entonces plantear la siguiente conjetura:

El área de un polígono con **n** *clavos en la orilla y sólo uno en su interior es igual a* **n**/2.

Para demostrar esto, podríamos usar la información del caso de polígonos sin clavos al interior.

Nos haremos una idea de lo que ocurre en el caso **n** = 3. Para mostrar que el área de un polígono con **3** clavos en la orilla y sólo uno en su interior es igual a **3**/2 (lo que ya vimos en dos ejemplos particulares), podemos dividir a dicho polígono en dos piezas, un polígono con 4 clavos en la orilla y ninguno al interior y un triángulo elemental (basta considerar los segmentos que unen el punto interior a dos de los vértices de la orilla). Como el polígono con 4 clavos tiene área (4 – 2)/2 y el triángulo elemental tiene área ½, el polígono original tiene área

$$\frac{4-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

En un polígono con **k** clavos en la orilla y sólo uno al interior podemos usar el clavo interior para dividir al polígono en dos piezas, una de ellas tendrá (**k** + 1) clavos en la orilla y ninguno al interior y la otra será un triángulo elemental. Así, el área del polígono es la suma de las áreas de las dos piezas:

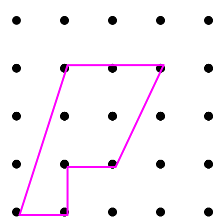
$$\frac{(k+1)-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k}{2}.$$

Podemos incorporar esta información en la tabla anterior para tener lo siguiente:

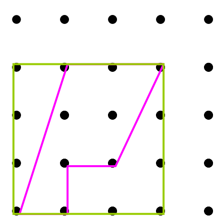
Número de clavos en la orilla de la figura	Área de la figura **sin** clavos en su interior	Área de la figura con sólo **un** clavo en su interior
3	½	3/2
4	1	2
5	3/2	5/2
6	2	3
7	5/2	7/2
8	3	4
9	7/2	9/2
⋮		
100	98/2 = 49	50
⋮		
n	(**n** – 2)/2	**n**/2

Si ahora tenemos polígonos con **n** clavos en la orilla y sólo dos clavos al interior, ¿cuál será su área?

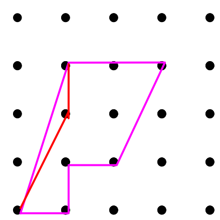
Podemos experimentar como antes o bien usar los resultados que hemos venido obteniendo. Hagamos sólo un ejemplo para ver qué ocurre geométricamente. La siguiente figura tiene 7 clavos en la orilla y sólo dos en su interior; podemos calcular su área por cualquiera de los métodos analizados hasta ahora.



Por ejemplo, si encerramos a la figura en un rectángulo y restamos las áreas de las piezas que sobran, tenemos que el área de la figura original es: 9 – (9/2) = 9/2.



Si dividimos esta figura en 2 piezas usando uno de sus puntos interiores, obtenemos una pieza con 8 clavos en la orilla y sólo uno al interior y un triángulo elemental. Como ya sabemos calcular esas áreas y 8/2 + ½ = 9/2, tenemos que el área de la figura original es 9/2.



Podemos establecer otra conjetura:

El área de un polígono con* n *clavos en la orilla y sólo dos clavos al interior es igual al área de un polígono con* (n + 1) *clavos en la orilla y sólo uno al interior, más ½. Es decir, el área del polígono original es igual a

$$\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2}.$$

La idea para mostrar la validez de esta conjetura es descomponer la figura en dos piezas, una con (**n** + 1) clavos en la orilla y un clavo al interior y la otra un triángulo elemental; para esto, elegimos uno de los clavos interiores y trazamos todos los segmentos posibles desde éste hacia los clavos de la orilla, de manera que los segmentos estén totalmente contenidos en el polígono. En esta descomposición debe existir un triángulo elemental, pues en caso contrario el clavo elegido no sería interior.

Hagamos una nueva tabla para incorporar los resultados obtenidos:

Número de clavos en la orilla de la figura	Área de la figura **sin** clavos en su interior	Área de la figura con sólo **un** clavo en su interior	Área de la figura con sólo **dos** clavos en su interior
3	½	3/2	5/2
4	1	2	3
5	3/2	5/2	7/2
6	2	3	4
7	5/2	7/2	9/2
8	3	4	5
9	7/2	9/2	11/2
⋮			
100	98/2 = 49	50	51
⋮			

n	(**n** – 2)/2	**n**/2	(**n** + 2)/2

¿Cuál es el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y sólo 3 clavos al interior? Podemos contestar esta pregunta de varias maneras: Una de ellas es volver a experimentar, otra es hacer "rompecabezas" y otra más consiste en analizar la tabla, viendo qué pasa al ir de una columna a otra en un renglón determinado.

Por ejemplo, podemos usar uno de los clavos interiores para ver que un polígono con **n** clavos en la orilla y sólo 3 clavos al interior se puede dividir en dos piezas, una con **n** + 1 clavos en la orilla y dos clavos al interior y la otra un triángulo elemental, de modo que el área de la figura es:

$$\frac{(n+1)+2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n+4}{2}.$$

De este modo, ya podemos agregar otra columna a la tabla:

Número de clavos en la orilla de la figura	Área de la figura **sin** clavos en su interior	Área de la figura con sólo **un** clavo en su interior	Área de la figura con sólo **dos** clavos en su interior	Área de la figura con sólo **tres** clavos en su interior
3	½	3/2	5/2	3 + ½
4	1	2	3	7/2 + ½
5	3/2	5/2	7/2	4 + ½
6	2	3	4	9/2 + ½
7	5/2	7/2	9/2	5 + ½
8	3	4	5	11/2 + ½
9	7/2	9/2	11/2	
⋮				
100	98/2 = 49	50	51	52
⋮				
n	(**n** – 2)/2	**n**/2	(**n** + 2)/2	(n **+ 4)/2**

En general, para un polígono con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior, podríamos usar uno de los clavos interiores para dividir dicho polígono en dos piezas, una con **n + 1** clavos en la orilla y **m – 1** al interior y la otra un triángulo elemental, de modo que si quisiéramos completar esta tabla con las áreas de las figuras con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior (que estarían en una cierta columna), nos fijaríamos en las áreas de las figuras con **n** clavos en la orilla y **m - 1** clavos al interior (en la columna anterior).

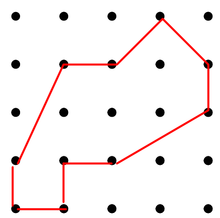
Si nos fijamos en el último renglón de la tabla y vemos lo que está pasando columna a columna, tendremos que ¡la diferencia entre los valores de cada columna es 1!

$$(n-2)/2 + \mathbf{1} = n/2, \quad n/2 + \mathbf{1} = (n+2)/2 \quad \text{y} \quad (n+2)/2 + \mathbf{1} = (n+4)/2$$

Así, podemos calcular el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **cero** al interior como (n – 2)/2 + **0**; el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **uno** al interior como (n – 2)/2 + **1**; el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **dos** al interior como: (n – 2)/2 + **2**, el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **tres** al interior como; (n – 2)/2 + **3**, y así sucesivamente. Parece que el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior es igual a (**n** – 2)/2 + **m**.

La idea entonces es que si ya sabemos calcular el área para una figura de **n** clavos en la orilla y **ninguno** al interior, podremos calcular el área de una figura con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior, para cualquier **m**.

Consideremos un ejemplo para ver si es cierto lo que estamos observando: la figura al lado tiene 10 clavos en la orilla y 4 clavos al interior; si calculamos su área por cualquier método (por ejemplo, encerrándola en un cuadrado), veremos que tiene área 8.



Pero por lo que veníamos observando, el área se puede calcular también mediante la fórmula (**n** – 2)/2 + **4 =** (**10** – 2)/2 + **4** = 8/2 + 4 = 4 + 4 = 8, ¡como antes!

Lo anterior nos hace sospechar que nuestra última observación (el área de un polígono con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior es igual a (**n** – 2)/2 + **m**) también es válida siempre. ¿Cómo la demostraremos?

Ya sabemos que un polígono de **n** clavos en la orilla y **ninguno** al interior tiene área igual a (**n** – 2)/2. De este modo, sólo tenemos que hacer ver que si mantenemos el número de clavos en la orilla y vamos aumentando el número de clavos al interior, el área aumentará en una unidad cada vez que aumentemos un clavo interior.

En el álgebra no tenemos ningún problema porque lo que tenemos que demostrar es la veracidad de las igualdades:

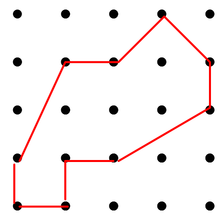
i) n/2 = (n – 2)/2 + 1.

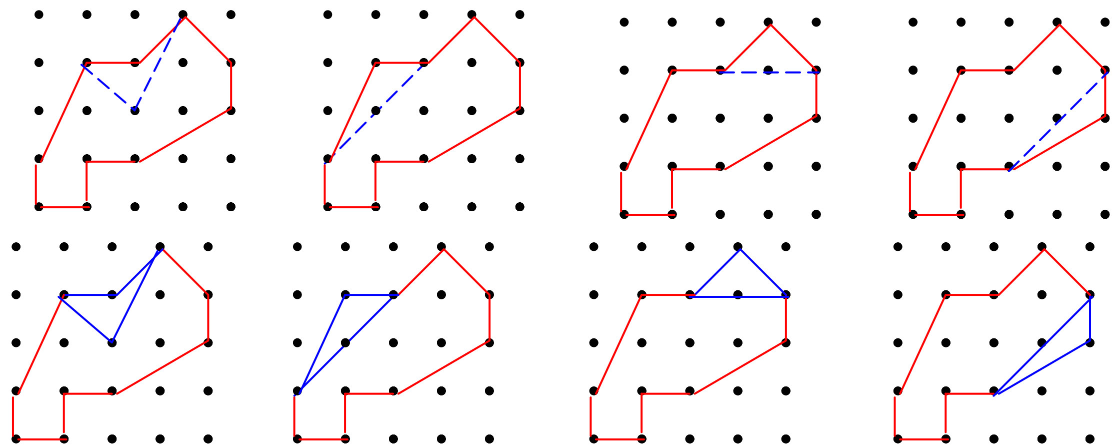
ii) (n + 2)/2 = (n – 2)/2 + 2.

iii) (n + 3)/2 + ½ = (n – 2)/2 + 3.

De este modo, la observación sigue pareciendo verdadera, por lo menos en las primeras columnas de la tabla.

Regresemos a ver qué es lo que sucede en la geometría. Si tenemos un polígono cualquiera (como el de la figura, con 10 clavos en la orilla y 4 al interior), podemos descomponerlo en un polígono con 10 clavos en la orilla y 3 en su interior y otro con 4 clavos en la orilla y ninguno en su interior. En las siguientes figuras mostramos la manera de hacerlo en este caso particular:





De modo que, el área es: [(10 – 2)/2 + 3] + [(4 – 2)/2] = (8/2 + 3) + **1** = 4 + 3 + **1** = 8

Si tenemos un polígono con **n** clavos en la orilla y **m** + 1 clavos al interior, podemos dividirlo en dos piezas: una con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior (el que podemos construir con un clavo interior y dos de la orilla, dejando afuera uno de la orilla) y el otro un polígono con 4 clavos en la orilla y ninguno al interior (el que construimos con el clavo que se dejó afuera, los dos de la orilla anterior y el interior que tomamos en el otro polígono).

Así, el área del polígono con **n** clavos en la orilla y **m** + 1 clavos al interior es igual al área del polígono con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior, más 1. De manera que desde la primera columna hasta la columna correspondiente a **m** clavos al interior lo que hay que sumar es precisamente **m**. En resumen,

El área de cualquier polígono con n clavos en la orilla y m clavos al interior se puede calcular mediante la fórmula

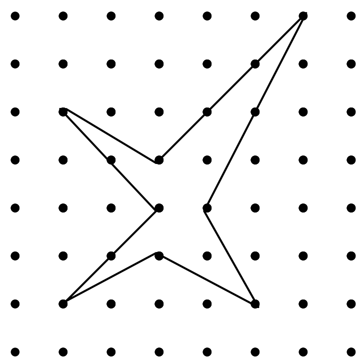
$$\frac{n-2}{2}+m.$$

Esta fórmula se conoce como la ***fórmula de Pick.***[*].

Hemos encontrado una manera sencilla y general de calcular el área de cualquier polígono simple con vértices en el geoplano; sólo tenemos que contar el número de puntos en la orilla y el número de puntos interiores en el polígono. Veamos un ejemplo de aplicación de la fórmula de Pick:

La figura al lado tiene 13 clavos en la orilla y 2 clavos al interior. Así, su área es:

$$\frac{13-2}{2}+2=\frac{15}{2}.$$



Podemos obtener unas consecuencias de la fórmula de Pick. En primer lugar, la forma misma de ella muestra que:

1. Todos los polígonos simples con vértices en clavos del geoplano tienen área igual a un múltiplo entero de ½.

Por otro lado, podemos ver la fórmula de Pick como una forma de contar el número de triángulos elementales en cada figura. Si una figura tiene área

$$\frac{n-2}{2}+m=\frac{n-2+2m}{2},$$

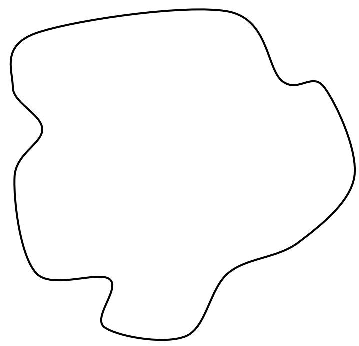
entonces tiene el área equivalente a la suma de las áreas de (**n** – 2 + 2**m**) triángulos elementales; es decir:

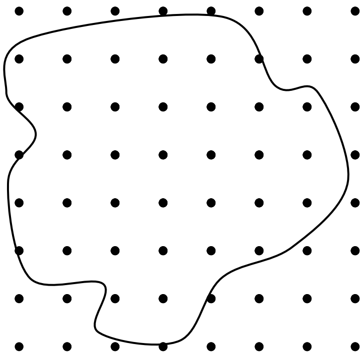
2 Una figura con **n** clavos en la orilla y **m** clavos al interior se descompone en (**n** – 2 + 2**m**) triángulos elementales.

[*] G. Pick. Geometrisches zur Zahlenlehre, Sitzungber. Lotos (Prague) 19 (1899), 311-319.

Finalmente, como aplicación de la fórmula de Pick, podemos aproximar el área que encierra una curva cerrada simple construyendo una malla de puntos de manera que la curva dada toque algunos de los puntos de la malla, aplicando allí la fórmula.

Por ejemplo, si queremos calcular el área de esta curva cerrada simple, podemos usar una malla de puntos y obtendremos una primera aproximación al área.





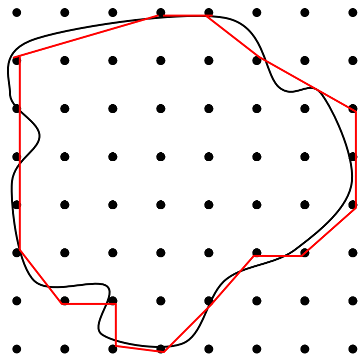
En esta malla, la curva toca a 7 puntos y tiene en su interior 31 puntos de la malla. Entonces una aproximación al área encerrada por la curva es:

$$\frac{7-2}{2}+31=\frac{67}{2}.$$

Podemos tener una mejor aproximación al área que encierra la curva si construimos un polígono con vértices en la malla y que se "parezca" lo más posible a la curva. El área del polígono es:

(18 – 2)/2 + 27 = 8 + 27 = 35.

Y ésta es una mejor aproximación que la teníamos.



Podríamos tener todavía una mejor aproximación al área si hacemos la distancia entre los puntos de la malla menor que la de la malla anterior.

Sugerencias de actividades complementarias.

1. Construir en un geoplano un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono cada uno sin clavos en su interior y que tengan sólo 6 clavos en la orilla. Obsérvese que el área de todas estas figuras es la misma y por lo tanto, obsérvese de nuevo que el área sólo depende del número de clavos de la orilla y no de la forma del polígono.

2. Las observaciones de la actividad anterior (y las realizadas con otros ejemplos de polígonos con 7, 8, etcétera, clavos en la orilla) sugieren que dado un número **k** de

clavos del geoplano, se pueden construir polígonos con 3, 4, 5,..., **k** lados sin clavos al interior y **k** clavos en la orilla cuya área es (**k** – 2)/2.

3. Con las observaciones y las actividades anteriores, se puede observar también que dado **n** fijo y **m** fijo se pueden construir polígonos de 3, 4, 5,..., **n** lados con **n** puntos en la orilla y **m** puntos al interior (todos, por supuesto, tienen la misma área).

4. a) Se puede investigar si hay algún polígono simple en el geoplano que tenga área igual a 2/3. Para esto, conviene revisar los valores que puede tener el área según la fórmula de Pick.

   b) Continuando con el análisis anterior, investigar si hay algún triángulo equilátero cuyos vértices sean clavos del geoplano.

5. Los polígonos comparten muchas propiedades interesantes. Una de ellas es la llamada *característica de Euler*, que podemos definir como sigue: Dividamos un polígono en cierto número de triángulos (lo "triangulamos"), de modo que siempre que dos de tales triángulos se intersecten, la intersección sea un lado o un vértice común. Si denotamos por *V* al número de vértices de los triángulos (sin repeticiones), *L* al número de lados (de nuevo sin repeticiones) y *T* al número de triángulos, entonces la característica de Euler del polígono es el número V + T – L

a) En una hoja blanca, trazar varios ejemplos de polígonos, triangularlos y calcular:
   V + T – L. ¿Se observa una propiedad común de los polígonos?

b) Los resultados del inciso anterior sugieren que la característica de Euler de cualquier polígono es igual a 1. Construir algunos polígonos en el geoplano con 3, 4 o 5 clavos en la orilla y triangularlos por medio de triángulos elementales. Calcular de nuevo:
   V + T – L.

c) Para ver que la característica de Euler de cualquier polígono en el geoplano es igual a 1, calcularemos V + T – L para un polígono con **n** clavos en la orilla y **m** en el interior, triangulado mediante triángulos elementales. En este caso, es claro que *V* = **n + m**. ¿Cuántos triángulos elementales hay en la triangulación? (Revise una de las consecuencias de la fórmula de Pick.)

d) Como continuación del inciso anterior, necesitamos calcular *L*, el número de lados de nuestra triangulación. Antes de realizar este cálculo, conviene construir varios polígonos, sus triangulaciones y contar el número de lados, reuniendo la información en tablas como las siguientes:

Figuras sin clavos al interior		
Número de clavos en la orilla	Número de triángulos elementales	Segmentos que unen los clavos
3	1	3
4	2	5
5	3	7

Figuras con un clavo al interior		
Número de clavos en la orilla	Número de triángulos elementales	Segmentos que unen los clavos
4	2	5
5	3	7
6	4	9

e) Para calcular cuántos segmentos tenemos, si contáramos los segmentos *con repeticiones*, obtendríamos el triple del número de triángulos (este número aparece en el inciso c). Si un segmento está en la orilla, no se cuenta con repetición, pero si el segmento no está en la orilla, se cuenta dos veces ¿por qué?. Así,

3·(número de triángulos) = (número de segmentos en la orilla) + (número de segmentos en el interior)

De aquí podemos calcular el número de segmentos en el interior y por tanto el número total de segmentos.

f) Finalmente, usar la información de los incisos (c) y (e) para calcular la característica de Euler de un polígono en el geoplano.

Bibliografia.

1. Alarcón, J. et al. Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria, Secretaría de Educación Pública, 1994.
2. Coxeter, H.S.M. Fundamentos de Geometría. Limusa, 1988.
3. Funkensbusch, W. From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. The American Mathematical Monthly. Vo. 81. N° 6, 1994. Pp 647–648.
4. Gattegno, C. et al. El material para la enseñanza de las matemáticas. Aguilar, 1964.
5. Lakatos, I. Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático. Serie Alianza Universitaria 206. Alianza Universidad, 1978.
6. Polya, G. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, 1984.
7. Saiz, I. y Block, D. El geoplano. Un recurso didáctico para explorar el mundo de la geometría elemental. Laboratorio de Psicomatemática, No. 2. DIE-CINVESTAV, 1984.
8. Shashkin, Yu. Característica euleriana. Lecciones Populares de matemáticas. Mir, 1989.